5.5. Prostije jednačine matematičke fizike

U matematičkoj fizici najčešće se sretaju PDJ drugog reda, kao na primjer:
jednačina treperenja (oscilacije) žice:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

jednačina provođenje toplote:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

i Laplasova jednačina (stacionarno provođenje toplote):

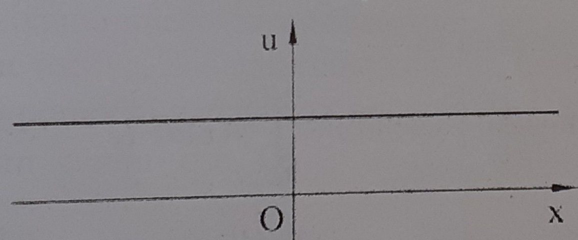
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

U prve dvije jednačine nepoznata funkcija je $u = u(x,t)$ (t-vrijeme) i $a \in R$, a u trećoj jednačini $u = u(x, y, z)$.

Razmotrimo neke slučajeve navedenih jednačina.

a) Treperenje neograničene žice

Ako se neograničena žica izvede iz stanja mirovanja ona počinje da treperi (sl 1).



sl 1

Matematički model tih treperenja je

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} \quad (-\infty < x < +\infty, \ \ t > 0) \tag{1}$$

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x), \tag{2}$$

gdje su φ i ψ dovoljno glatke (diferencijabilne) funkcije.

Treba da nađemo rješenje Kz (1)-(2).

Jednačina (1) je hiperboličkog tipa, jer je $\Delta = a^2 > 0$ Nađimo kanonski oblik jednačine (1). Jednačina karakteristika je $dx^2 - a^2 dt^2 = 0$. Dalje je $x + at = C_1$ i $x - at = C_2$. Uvedimo smjene $\xi = x + at$ i $\eta = x - at$. Tada je

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \eta}\right),\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right).$$

Jednačina (1) u novim promjenljivim ima oblik $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}=0$. Proizvoljno rješenje ove jednačine je $u=F_1(\xi)+F_2(\eta)$, gdje su F_1 i F_2 proizvoljne dva puta neprekidno-diferencijbilne funkcije. Saglasno uvedenim smjenama, jednačina (1) ima rješenje

$$u=F_1(x+at)+F_2(x-at). \tag{3}$$

Da bismo odredili nepoznate funkcije F_1 i F_2 iskoristićemo početne uslove (2):

$$u\big|_{t=0}=F_1(x)+F_2(x)=\varphi(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=aF_1'(x)-aF_2'(x)=\psi(x).$$

Poslije integracije druge jednakosti dobijamo

$$\begin{cases} F_1(x)+F_2(x)=\varphi(x) \\ F_1(x)-F_2(x)=\frac{1}{a}\int\limits_{x_0}^{x}\psi(z)dz+C, \end{cases} \tag{4}$$

gdje su x_0 i C proizvoljne konstante. Iz sistema (4) nalazimo

$$F_1(x)=\frac{\varphi(x)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x_0}^{x}\psi(z)dz+\frac{C}{2} \text{ i } F_2(x)=\frac{\varphi(x)}{2}-\frac{1}{2a}\int\limits_{x_0}^{x}\psi(z)dz-\frac{C}{2}. \tag{5}$$

Zamjenom (5) u (3) dobijamo da je

$$u=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\left(\int\limits_{x_0}^{x+at}\psi(z)dz-\int\limits_{x_0}^{x-at}\psi(z)dz\right),$$

odnosno

$$u=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz. \tag{6}$$

Formula (6) daje rješenje Kz (1)-(2) i naziva se Dalamberova formula.

Primjer 1. Naći rješenje jednačine

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} \quad (-\infty<x<+\infty,\ t>0), u\big|_{t=0}=x^2,\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0.$$

Kako je a=1, $\varphi(x)=x^2$ i $\psi(x)=0$, to zamjenom u Dalamberovu formulu dobijamo da je $u=\frac{(x-t)^2+(x+t)^2}{2}$ ili $u=x^2+t^2$.

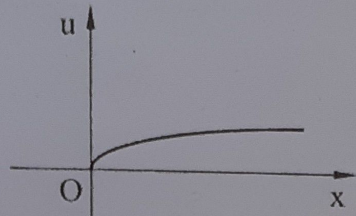
Primjer 2. Naći rješenje jednačine

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=4\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} \quad (-\infty<x<+\infty,\ t>0), u\big|_{t=0}=0,\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=x.$$

Kako je a=4, $\varphi(x)=0$ i $\psi(x)=x$, to zamjenom u Dalamberovu formulu dobijamo da je $u=xt$.

b) Treperenje polugraničene žice

Razmotrimo zadatak treperenja polugraničene žice (sl 2). Zadatak se svodi na nalaženje



sl 2

rješenja jednčine

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} \quad (0<x<+\infty,\ t>0), \tag{7}$$

koje zadovoljava granični uslov

$$u\big|_{x=0}=0, \tag{8}$$

i početne uslove

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x). \tag{9}$$

Ovaj zadatak nazivamo mješovitim zadatakom, jer se od rješenja traži da zadovoljava početne i granične uslove. Zadatak ćemo označiti kratko sa Mz (7) -(8), (9).

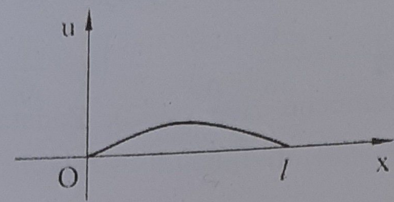
Riješimo pomoćni zadatak za neograničenu žicu, pri čemu ćemo funkcije φ i ψ na negativnom dijelu ose Ox produžiti neparnim funkcijama, tj. za $x<0$: $\varphi(-x)=-\varphi(x)$ i $\psi(-x)=-\psi(x)$. Neka je $\varphi_p(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x>0\\ -\varphi(-x), & x<0\end{cases}$ i $\psi_p(x)=\begin{cases}\psi(x), & x>0\\ -\psi(-x), & x<0\end{cases}$. Saglasno dalamberovoj formuli imamo da je funkcija

$$u(x,t)=\frac{\varphi_p(x+at)+\varphi_p(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi_p(z)dz$$

rješenje Mz (7) -(8), (9).

c) Treperenje ograničene žice

Treperenje ograničene žice dužine l (sl 3) opisuje sljedeći Mz:



sl 3

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 < x < l, \ \ t > 0), \tag{10}$$

$$u\big|_{x=0} = 0, \qquad u\big|_{x=l} = 0, \tag{11}$$

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x). \tag{12}$$

Za rješavanje Mz (10) -(11), (12) primijenićemo Furijeov metod (metod razdvojenih promjenljivih). Rješenje tražimo u obliku proizvoda dvije funkcije, od kojih je jedna samo funkcija od t, a druga samo funkcija od x, tj.

$$u = T(t)X(x). \tag{13}$$

Zamjenom (13) u (10) dobijamo da je

$$T''(t)X(x) = a^2 T(t)X''(x),$$

odnosno

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Kako je na lijevoj strani znaka jednakosti funkcija od t, a na desnoj strani funkcija od x, to je jednakost moguća samo onda kada su obje strane jednake konstanti. Označimo tu konstantu sa λ. Dakle,

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda.$$

Iz (14) slijedi da je

$$T''(t) - \lambda a^2 T(t) = 0, \tag{14}$$

i

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0. \tag{15}$$

Kako je $u\big|_{x=0} = T(t)X(0) = 0$ to je $X(0) = 0$, jer bi se u suprotnom dobilo trivijalno rješenje $u \equiv 0$ (žica ne vrši nikakva treperenja). Na sličan način se dokazuje da je $X(l) = 0$.

Dakle,

$$X(0) = 0, \ X(l) = 0. \tag{16}$$

Sada odredimo rješenje Gz: (15)-(16). Interesuju nas netrivijalna rješenja. To znači da odredimo sopstvene vrijednosti i sopstvene funkcije Gz (15)-(16).

Razmotrićemo tri slučaja. 1) $\lambda > 0$. Tada je $X = C_1 e^{-\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{\sqrt{\lambda}x}$ proizvoljno rješenje jednačine (15). Zamjenom graničnih uslova (16) dobijamo da je $C_1 = C_2 = 0$, tj. $X \equiv 0$. 2) Za $\lambda = 0$ imamo da je $X = C_1 + C_2 x$. I ovdje zamjena početnih uslova daje $C_1 = C_2 = 0$, tj. $X \equiv 0$. 3) $\lambda < 0$. Sada je $X = C_1 \sin\sqrt{-\lambda}x + C_2 \cos\sqrt{-\lambda}x$. Iz graničnog uslova $X(0) = 0$ dobijamo da je $C_2 = 0$. Iz graničnog uslova $X(l) = 0$ dobijamo da je $C_1 \sin\sqrt{-\lambda}l = 0$. Konstanta C_1 može biti različita od nule, ako je $\sin\sqrt{-\lambda}l = 0$, tj. $\sqrt{-\lambda}l = \pi k$, k=1,2,3.... . Slijedi, $\lambda_k = -\dfrac{\pi^2 k^2}{l^2}$ su sopstvene vrijednosti, a pripadajuća netrivijalna rješenje su supstvene funkcije $X_k(x) = \sin\dfrac{\pi k x}{l}$. Vrijednosti λ_k za $\lambda = 0,\ -1,\ -2,\ -3...$ se ne uzimaju u razmatranje, jer one odgovaraju ili trivijalnom rješenje $X_k(x) = 0$, ili linearno zavisnom rješenju $X_{-k}(x) = -X_k(x)$.

Rješenje jednačine (14) za $\lambda = \lambda_k$ ima oblik

$$T_k(t) = A_k \cos\frac{\pi k a t}{l} + B_k \sin\frac{\pi k a t}{l},$$

gdje su A_k i B_k koeficijenti koje ćemo, nešto kasnije, odrediti.

Na ovaj način, funkcije

$$u_k = T_k(t) X_k(x) = \left(A_k \cos\frac{\pi k a t}{l} + B_k \sin\frac{\pi k a t}{l} \right) \sin\frac{\pi k x}{l}$$

su partikularna rješenja jednačine (10) koja zadovoljavaju granične uslove (11) za proizvoljne konstante A_k i B_k.

Saglasno svojstvu superpozicije rješenja homogene linearne PDJ imamo da će red

$$u = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(A_k \cos\frac{\pi k a t}{l} + B_k \sin\frac{\pi k a t}{l} \right) \sin\frac{\pi k x}{l} \tag{17}$$

biti rješenje jednačine (10), ako red ravnomjerno konvergira (tada se red može diferencirati po t i x). Funkcija $u(t,x)$, koja je zbir reda (17), zadovoljava granične uslove (11).

Odredimo koeficijente A_k i B_k tako da rješenje (17) zadovoljava početne uslove (12). Diferencirajmo red (17) po t:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\pi k a}{l} \left(-A_k \sin\frac{\pi k a t}{l} + B_k \cos\frac{\pi k a t}{l} \right) \sin\frac{\pi k x}{l}. \tag{18}$$

Zamijenimo $t = 0$ u (17) i (18). Tada, saglasno početnim uslovima (12), imamo da je

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \sin\frac{\pi k x}{l},$$

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\pi k a}{l} B_k \sin\frac{\pi k x}{l}.$$

Ovi redovi predstavljaju razlaganje funkcija $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ u Furijeove redove po sinusima. Koeficijenti razlaganja se izračunavaju po formulama:

$$A_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi kx}{l}dx,$$

$$B_k = \frac{2}{\pi ka}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{\pi kx}{l}dx.$$

Zamjenom ovako dobijenih A_k i B_k u (17) dobijamo rješenje Mz (10) -(11), (12).

Primjer 3. Žica je pričvršćena u krajevima x=0 i x=l, a u početnom momentu ima formu parabole $u = \frac{4h}{l^2}x(l-x)$. Odrediti treperenje žice ako je početna brzina treperenja jednaka nuli. Ovdje je $\varphi(x) = \frac{4h}{l^2}x(l-x)$ i $\psi(x) = 0$. Nalazimo koeficijente reda
koji definiše rješenje treperenja ograničene žice:

$$A_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi kx}{l}dx = \frac{8h}{l^3}\int_0^l (lx - x^2)\sin\frac{\pi kx}{l}dx,\ B_k = 0.$$

Kada se primijeni dva puta parcijalna integracija, tada se dobija da je $A_k = \frac{16h}{k^3\pi^2}(1-(-1)^k)$. Zamjenom A_k i B_k u formuli (17) dobijamo da je rješenje funkcija

$$u = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{16h}{k^3\pi^3}(1-(-1)^k)\cos\frac{\pi kat}{l}\sin\frac{\pi kx}{l}.$$

Kako je za k=2n: 1−(−1)^k=0, a za k=2n+1: 1−(−1)^k=2, to se gornje rješenje može zapisati u obliku

$$u = \frac{32h}{\pi^3}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\cos\frac{\pi(2n+1)at}{l}\sin\frac{\pi(2n+1)x}{l}.$$

d) Hlađenje štapa konačne dužine

Hlađenje štapa dužine l (sl 4) opisuje Mz:

sl 4

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 < x < l,\ \ t > 0), \tag{19}$$

$u\big|_{t=0} = \varphi(x)$ (početni uslov), (20)

$u\big|_{x=0} = A$, $.u\big|_{x=l} = B$ (granični uslovi). (21)

Uvedimo smjenu promjenljivih tako da nova nepoznata funkcija zadovoljava homogene granične uslove. Za to je dovoljno uvesti smjenu

$$v(x,t) = u(x,t) - \left[\frac{B-A}{l}x + A\right], \tag{22}$$

gdje nova nepoznata funkcija v zadovoljava jednačinu

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 < x < l,\ \ t > 0\,), \tag{23}$$

početni uslov

$$v\big|_{t=0} = u\big|_{t=0} - \left[\frac{B-A}{l}x + A\right] = \varphi(x) - \left[\frac{B-A}{l}x + A\right] = \varphi_1(x)\,, \tag{24}$$

i homogene granične uslove

$$v\big|_{x=0} = 0\,,\ \ v\big|_{x=l} = 0\,. \tag{25}$$

Homogenu jednačinu (23) sa nehomogenim početnim uslovom (24) i homogenim graničnim uslovima (25) možemo riješiti Furijeovim metodom (slično treperenju ograničene žice). U početku tražimo (netrivijalno) rješenje u obliku proizvoda

$$v = T(t)X(x)\,. \tag{26}$$

Zamjenom (26) u (23) dobijamo

$$T'(t)X(x) = a^2 T(t)X''(x)\,,$$

odnosno

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2 \quad (= const)\,.$$

Dalje je

$$T'(t) + \lambda^2 a^2 T(t) = 0\,, \tag{27}$$

i

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0\,. \tag{28}$$

Iz graničnih uslova (24) dobijamo:

$$X(0) = 0\,,\ X(l) = 0\,. \tag{29}$$

Sopstvene vrijednosti Gz (28)-(29) su $\lambda_k = \dfrac{\pi k}{l}$ (k=1,2,3...), a pripadjuće sopstvene funkcije $X_k(x) = \sin\dfrac{\pi k x}{l}$. Za $\lambda = \lambda_k$ jednačina (28) ima rješenje oblika $T_k(t) = A_k e^{-\frac{\pi^2 a^2 k^2}{l^2}t}$, gdje je A_k konstantu (koju ćemo kasnije odrediti). Funkcije

$$v_k(x,t) = T_k(t)X_k(x) = A_k e^{-\frac{\pi^2 a^2 k^2}{l^2}t} \sin\frac{\pi k x}{l}$$

su partikularna rješenja jednačine (23) koja zadovoljavaju granične uslove (25). Saglasno principu superpozicije rješenje je i funkcija

$$v=\sum_{k=1}^{+\infty} v_k(x,t)=\sum_{k=1}^{+\infty} A_k e^{-\frac{\pi^2 a^2 k^2}{l^2}t}\sin\frac{\pi k x}{l}. \qquad (30)$$

Konstante A_k određuju se iz uslova da rješenje (30) zadovoljava početni uslov (24). Stavljajući $t=0$ dobijamo $\varphi_1(x)=\sum_{k=1}^{+\infty} A_k \sin\frac{\pi k x}{l}$, odnosno

$$A_k=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi_1(x)\sin\frac{\pi k x}{l}dx=\frac{2}{l}\left[\int_0^l \varphi(x)-\left(A+\frac{B-A}{l}x\right)\right]\sin\frac{\pi k x}{l}dx,$$

tj.

$$A_k=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi k x}{l}dx-\frac{2}{\pi k}\left(A+(-1)^{n+1}B\right). \qquad (31)$$

S obzirom na smjenu (22) imamo da je funkcija

$$u=A+\frac{B-A}{l}x+\sum_{k=1}^{+\infty} A_k e^{-\frac{\pi^2 a^2 k^2}{l^2}t}\sin\frac{\pi k x}{l},$$

gdje se koeficijenti A_k određuju iz formule (31), rješenje Mz (19)-(20), (21).

Primjer 4. Naći rješenje jednačine

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} \qquad (0<x<l,\ t>0),$$

$$u\Big|_{t=0}=\varphi(x)=\begin{cases} x, & \text{ako je } 0<x\le\frac{l}{2} \\ l-x, & \frac{l}{2}\le x<\frac{l}{2}\end{cases},\ u\Big|_{x=0}=u\Big|_{x=l}=0.$$

Rješenje Košijevog zadatka koje zadovoljava date granične uslove ima oblik

$$u=\sum_{k=1}^{+\infty} A_k e^{-\frac{\pi^2 k^2}{l^2}t}\sin\frac{\pi k x}{l},$$

gdje je $A_k=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi k x}{l}dx=\frac{2}{l}\int_0^{l/2} x\sin\frac{\pi k x}{l}dx+\frac{2}{l}\int_{l/2}^l (l-x)\sin\frac{\pi k x}{l}dx$. Poslije primjene dvije uzastopne parcijalne integracije dobijamo da je $A_k=\frac{4l}{\pi^2 k^2}\sin\frac{\pi k}{2}$, odnosno da je traženo rješenje

$$u=\frac{4l}{\pi^2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}e^{-\frac{\pi^2 k^2}{l^2}t}\sin\frac{\pi k x}{l}$$

ili

$$u=\frac{4l}{\pi^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}e^{-\frac{\pi^2(2n+1)^2}{l^2}t}\sin\frac{\pi(2n+1)x}{l}.$$

e) Hlađenje neograničenog i poluograničenog štapa

Hlađenje štapa neograničene dužine opisuje Košijev zadatak:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (-\infty<x<+\infty,\ t>0),\ u\big|_{t=0}=\varphi(x)\ \ (-\infty<x<+\infty).$$

Primjenom Furijeovog metoda može se dokazati da je rješenje datog zadatka

$$u=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\,d\xi .$$

(Puasonov integral).

Hlađenje štapa ograničenog sa jedne strane opisuje mješoviti zadatak:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0<x<+\infty,\ t>0),\ u\big|_{t=0}=\varphi(x).\ \ u\big|_{x=0}=\psi(x)\ \ (-\infty<x<+\infty).$$

Rješenje ovog zadatka je

$$u=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{0}^{+\infty}\varphi(\xi)\left[e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\cdot e^{-\frac{(\xi+x)^2}{4a^2t}}\right]d\xi+\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{0}^{+\infty}\psi(\eta)e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\eta)}}(t-\eta)^{-\frac{3}{2}}\,d\eta .$$

f) Laplasova jednačina

U (trodimenzionalnom) prostoru jednačina provođenja toplote ima oblik $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$. U slučaju stacionarnog provođenja toplote (kada provođenje toplote ne za visi od vremena *t*) dobija se Laplasova jednačina

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0, \tag{32}$$

jer je $\frac{\partial u}{\partial t}\equiv 0$. Laplasova jednačina se zapisuje i u obliku $\Delta u=0$, gdje je Δ Laplasov operator, tj. $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$. Za zadatke u ravni Laplasova jednačina ima oblik

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0. \tag{33}$$

Radi se o jednačini sličnoj jednačini u prostoru, s tim što nepoznata funkcija ne zavisi od promjenljive *z*.

Sa pojmom Laplasove jednačine povezan je pojam harmonijske funkcije. Funkciju nazivamo harmonijskom u oblasti *D* ako je ona rješenje Laplasove jednačine (funkcija je neprekidna zajedno sa svojim izvodima prvog i drugog reda). Tako, na primjer funkcija $u=\frac{1}{r}$, gdje je $r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$, je harmonijska funkcija u svakoj oblasti koja ne sadrži tačku $M_0(x_0,y_0,z_0)$, tj. zadovaljava jednačinu (32). Za svaku oblast u ravni funkcija $u=\ln r$ je harmonijska, tj. zadovoljava jednačinu (33).

Zadatak nalaženja harmonijske funkcije, koja je neprekidna u oblasti D uključujući i površ S koja ograničava tu oblast, i koja zadovoljava granični uslov $u\big|_S = f(M)$, gdje je $f(M) = f(x,y,z)$ zadata funkcija, nazivamo Dirihleov zadatak.

U cilindričnim koordinatama (ρ, θ, z): $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$, $z=z$ Laplasova jednačina ima oblik

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

ili u obliku

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Specijalno, u slučaju ravni (polarne koordinate) Laplasova jednačina ima oblik

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0,$$

ili

$$\rho^2\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \rho\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0. \qquad (34)$$

Razmotrimo Dirihleov zadatak za krug. Znači, treba naći neprekidnu funkciju $u=u(x,y)$ koja ima neprekidne izvode prvog i drugog reda , zadovoljava Laplasovu jednačinu (33) i zadovoljava granični uslov $u\big|_k = \varphi(x,y)$. Ovdje je k kružnica poluprečnika R, pa se granični uslov može zapisati u obliku $u\big|_{\rho=R} = \varphi(R\cos\theta, R\sin\theta) \equiv f(\theta)$.

Primijenimo Furijeov metod. Tražimo rješenje u obliku $u = R(\rho)T(\theta)$. Zamjenom $u = R(\rho)T(\theta)$ u jednačini (34) dobijamo jednačinu $\rho^2 R''(\rho)T(\theta) + \rho R'(\rho)T(\theta) + R(\rho)T''(\theta) = 0$, koju možemo zapisati i u obliku $\dfrac{T''(\theta)}{T(\theta)} = -\dfrac{\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho)}{R(\rho)}$. Stavljajući da su obje strane zadnje jednačine jednake $-\lambda^2$ dobijamo dvije (obične) diferencijalne jednačine:

$$T''(\theta) + \lambda^2 T(\theta) = 0, \quad \rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) - \lambda^2 R(\rho) = 0.$$

Za $\lambda=0$ imao da je $T(\theta) = A + B\theta$ i $R(\rho) = C + D\ln\rho$. Za $\lambda>0$ imamo da je $T(\theta) = A\cos\lambda\theta + B\sin\lambda\theta$ i $R(\rho) = C\rho^{\lambda} + D\rho^{-\lambda}$. Kako je funkcija $u(\rho,\theta)$ posmatrana kao funkcija od θ periodična sa osnovnim periodom jednakim 2π, to je B=0 a za λ može se uzeti jedna od vrijednosti: 1, 2, 3,… . i D=0, jer bi u suprotnom funkcija $u(\rho,\theta)$ imala prekid u ρ=0 i ne bi bila harmonijska u krugu. Na ovaj način dobijamo beskonačno mnogo partikularnih rješenja jednačine (34) koja su neprekidna u krugu:

$$u_0(\rho,\theta) = \frac{A_0}{2}, \; u_n(\rho,\theta) = \left(A_n\cos n\theta + B_n\sin n\theta\right)\rho^n, \text{ gdje je } n=1, 2, 3\ldots .$$

Sada sastavimo funkciju

$$u(\rho,\theta)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta\right)\rho^n ,$$

koja je zbog linearnosti Laplasove jednačine takođe njeno rješenje. Za određivanje konstanti A_0, A_n i B_n iskoristićemo granični uslov $u\big|_{\rho=R}=f(\theta)$. Slijedi,

$$f(\theta)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}R^n\left(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta\right).$$

Ovdje imamo razlaganje funkcije $f(\theta)$ u Furijeov red na odsječku $[-\pi,\pi]$. Slijedi,

$$A_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\tau)d\tau,\quad A_n=\frac{1}{\pi R^n}\int_{-\pi}^{\pi}f(\tau)\cos n\tau d\tau,\quad B_n=\frac{1}{\pi R^n}\int_{-\pi}^{\pi}f(\tau)\sin n\tau d\tau .$$

Na ovaj način dobijamo rješenje Dirihleovog zadatka za krug

$$u(\rho,\theta)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\tau)\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\rho}{R}\right)^n\cos n(\tau-\theta)\right]d\tau .$$

Poslije određenih transformacija ove rješenje možemo zapisati u obliku

$$u(\rho,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\tau)\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho\cos(\tau-\theta)+\rho^2}d\tau . \qquad (35)$$

Integral na desnoj strani rješenja (35) naziva se Puasonov integral.